MAT 498 Projektif Geometri Final Sınavı(31.05.2019)

Adı Soyadı:

Numarası:

1	2	3	4	5	Toplam

1.) $\mathcal{N} = \{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5, N_6, N_7, N_8, N_9, N_{10}, N_{11}, N_{12}, N_{13}\}$,

$\mathcal{D} = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6, d_7, d_8, d_9, d_{10}, d_{11}, d_{12}, d_{13}\}$ ve üzerinde bulunma bağıntısı aşağıdaki çizelgede " $N_i \circ d_j \Leftrightarrow i.$ satır $j.$ kolon da ■ görülüyor " ile tanımlanmak üzere $(\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ sisteminin bir projektif düzlem olup olmadığını araştırınız.

$\circ$	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	d_{10}	d_{11}	d_{12}	d_{13}
N_1	■			■				■			■		
N_2			■				■			■	■		
N_3		■			■				■		■		
N_4	■		■		■	■							
N_5				■		■	■		■				
N_6		■				■		■		■			
N_7	■								■	■		■	
N_8					■		■	■				■	
N_9		■	■	■								■	
N_{10}	■	■					■						■
N_{11}			■					■	■				■
N_{12}				■	■					■			■
N_{13}						■					■	■	■

2.) Duallik ilkesinin bir Afin düzlemde neden geçerli olamayacağını açıklayınız.

3.) İşlemleri aşağıdaki çizelgelerle verilen $GF(2) = \{0,1\}$ cismi yardımıyla tanımlanan afin düzlemlere ait bütün doğru ve noktaları bulunuz. $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ noktalarının hangi doğrular üzerinde olduğunu gösteriniz.

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

4.) Bir $\mathbb{P} = (\mathcal{N}, \mathcal{D}, \circ)$ projektif düzleminde farklı iki doğrunun bir tek noktada kesiştiğini gösteriniz.

5.) Bir Afin düzleminde birbirine paralel doğrulardan oluşan herhangi iki kümenin aynı sayıda elemanı olduğunu ve bu sayının düzlemin mertebesine eşit olduğunu gösteriniz. Böyle $n + 1$ tane kümenin (paralel doğru demetinin) var olduğunu gösteriniz.

<u>NOT:</u> Süre 100 dakikadır. BAŞARILAR. *Prof. Dr. Ayhan TUTAR*

CEVAPLAR

31/05/2019

Mat 498 Projektif Geometri Final Sınavı

C-1) **(P1)** Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer mi?

$N_1, N_2 \in \mathcal{N}$, $N_1 \neq N_2$ için $N_1 \circ d_{11}$, $N_2 \circ d_{11} \Rightarrow N_1N_2 = d_{11}$ olup N_1 ve N_2 den geçen başka doğru yoktur.

$N_7, N_8 \in \mathcal{N}$ için $N_7 \circ d_{12}$, $N_8 \circ d_{12} \Rightarrow N_7N_8 = d_{12}$ olup N_7 ve N_8 den geçen başka bir doğru yoktur.

Her farklı iki nokta için bu söylenebilir. O halde (P1) sağlanır.

(P2) Farklı iki doğru tek bir noktada kesişir mi?

$d_{11}, d_{12} \in \mathcal{D}$ için $d_{11} \wedge d_{12} = N_{13}$ olacak şekilde bir tek $N_{13} \in \mathcal{N}$ vardır.
$d_5, d_6 \in \mathcal{D}$ için $d_5 \wedge d_6 = N_4$ olacak şekilde bir tek $N_4 \in \mathcal{N}$ vardır.

Benzer şekilde farklı iki doğrular çoğaltılabilir. Yani herhangi iki kolonda aynı satır numaralı birer tek kare kutu olduğundan iki doğru bir ortak noktaya sahiptir.

(P3) Herhangi üçü doğrudaş olmayan 4 nokta var mıdır?

$\underbrace{N_1, N_2}_{d_{11}}, N_4, N_5$ böyle bir dörtlüdür.

d_3 d_6

C-2) Duallik ilkesinin Afin Düzlemde geçerli olabilmesi için afin düzleme ait geçerli teorem ya da tanımın dualinin de geçerli ve doğru olması gerekir.

(A1) "Farklı iki noktadan bir tek doğru geçer" ifadesinin duali; yani (A1) in duali: "Farklı iki doğru bir tek noktada kesişir" şeklindedir. Ancak bu afin düzlemde doğru değildir. Çünkü, Afin Düzlemde farklı iki doğru bir tek noktada kesişebileceği gibi paralel de olabilir. O halde Afin Düzlemde duallik ilkesi geçerli değildir.

Mat 424 Projektif Geometri Final Sınavı (27.05.2013)

C-3)

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

,

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Toplam nokta sayısı n^2 olduğundan, $n=2$, $2^2=4$ dir.

Toplam doğru sayısı $=n^2+2$ den $2^2+4=6$ dır.

$\mathcal{N}=\mathbb{F}\times\mathbb{F}=\{0,1\}\times\{0,1\}=\{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}=\{(x,y)\mid x,y\in\mathbb{F}\}$.

$\mathcal{D}=\{[m,b]\mid m,b\in\mathbb{F}\}\cup\{[a]\mid a\in\mathbb{F}\}=\{[0,0],[0,1],[1,0],[1,1]\}\cup\{[0],[1]\}$.

$\circ$: $(x,y)\circ[m,b]\Leftrightarrow y=mx+b$,

$(x,y)\circ[a]\Leftrightarrow x=a$ dır.

(i) $(0,0)\circ[m,b]\Leftrightarrow 0=m.0+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $0=0.0+b\Rightarrow b=0$,

$m=1$ için $0=1.0+b\Rightarrow b=0$

$(0,0)\circ[0,0]$, $(0,0)\circ[1,0]$ dır.

$(0,0)\circ[x]\Leftrightarrow x=0\Rightarrow(0,0)\circ[0]$ dır. Buna göre $(0,0)$ noktası $[0,0],[1,0],[0]$ doğruları üzerindedir.

(ii) $(0,1)\circ[m,b]\Leftrightarrow 1=m.0+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $1=0.0+b\Rightarrow b=1$, $m=1$ için $1=1.0+b\Rightarrow b=1$, $(0,1)\circ[x]\Leftrightarrow x=0$.

Buna göre, $(0,1)$ noktası $[0,1],[1,1],[0]$ doğruları üzerindedir.

(iii) $(1,1)\circ[m,b]\Leftrightarrow 1=m.1+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $1=0.1+b\Rightarrow b=1$, $m=1$ için $1=1.1+b\Rightarrow b=0$, $(1,1)\circ[x]\Leftrightarrow x=1$ dir.

Buna göre, $(1,1)$ noktası $[0,1],[1,0],[1]$ doğruları üzerindedir.

(iv) $(1,0)\circ[m,b]\Leftrightarrow 0=m.1+b$, $(m=0,1)$,

$m=0$ için $0=0.1+b\Rightarrow b=0$, $m=1$ için $0=1.1+b\Rightarrow b=1$, $(1,0)\circ[x]\Leftrightarrow x=1$ dir.

Buna göre, $(1,0)$ noktası $[0,0],[1,1],[1]$ doğruları üzerindedir.

Dolayısıyla $\mathbb{A}_2\mathbb{F}$ afin düzleminin noktaları ve karşılarında da üzerinde bulundukları doğrular gösterilmiştir:

$(0,0)$: $[0,0],[1,0],[0]$

$(0,1)$: $[0,1],[1,1],[0]$

$(1,1)$: $[0,1],[1,0],[1]$

$(1,0)$: $[0,0],[1,1],[1]$

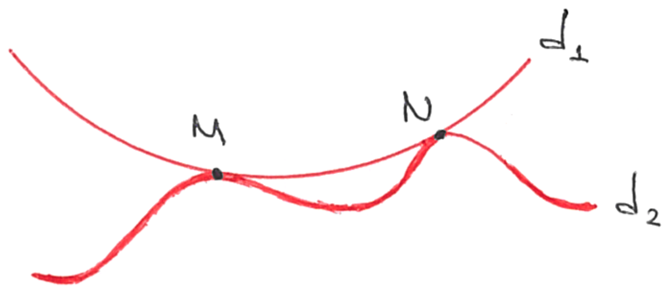
31/05/2019

C-4) $d_1, d_2 \in \mathcal{D}$, $d_1 \neq d_2$ olsun. (P2) gereğince $\exists N \in \mathcal{N}$ vardır, öyleki $N o d_1$ ve $N o d_2$.

İspatı yapmak icin bu özelliği sağlayan başka bir noktanın bulunmadığını göstermek gerekir. $M o d_1$ ve $M o d_2$ olacak sekilde başka bir $M \in \mathcal{N}$ noktasının bulunduğunu varsayalım. Yani M de d_1 ve d_2 doğrularının üzerinde bir başka nokta ve ayrıca $M \neq N$ olsun. Bu taktirde,

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} N o d_1 \\ M o d_1 \end{array}\right\} \xRightarrow{(P1)\text{ den}} MN = d_1 \\ \\ \left.\begin{array}{l} N o d_2 \\ M o d_2 \end{array}\right\} \xRightarrow{(P1)\text{ den}} MN = d_2 \end{array}\right\}$$

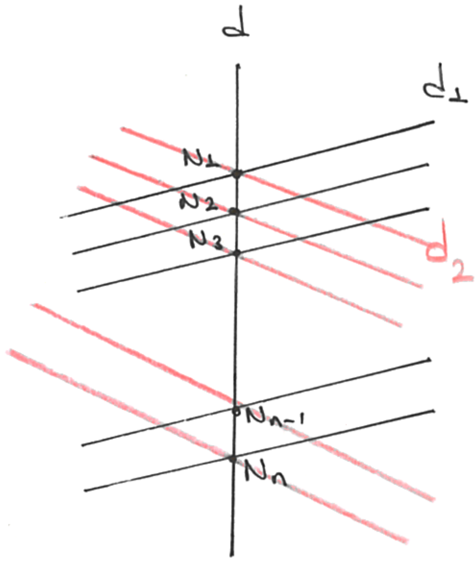
dir. Oysa (P1) gereğince iki noktadan bir tek doğru gectiğinden $d_1 = d_2$ olur. Bu ise hipotezle celisir. O halde böyle bir M noktası yoktur. Yani, farklı iki doğru farklı bir tek noktada kesisir.



Mat 424 Projektif Geometri Final (27.05.2013)

C-5) d_1 ve d_2 doğruları farklı iki paralel demetine ait doğrular olsunlar. Bu durumda $d_1 d_2 = N_1$ ($d_1 \not\parallel d_2$ olduğundan) olacak şekilde $N_1 \in \mathcal{N}$ noktası vardır. En küçük afin düzlemde bir noktadan 3 doğru geçtiğinden d_1 ve d_2 den farklı olarak N den geçen bir başka d doğrusu vardır.

Afin düzlemde bir doğru üzerinde n-tane nokta bulunduğundan dolayı d doğrusu üzerinde n nokta vardır. Bu noktalar $N_1, N_2, \dots, N_n$ olsun (A2) aksiyomu gereğince $\forall N_i$ den geçen ve d_1'e paralel olan doğrular ile $\forall N_i$ den geçen ve d_2 ye paralel olan doğrular vardır. Böylece $\forall N_i$ sayesinde d_1 ve d_2 yi kapsayan paralel doğru demetleri arasında 1-1 ve örten bir fonksiyon kurulmuş olur.



Açıkça paralel doğru demetleri ayrıktır. Bir afin düzlemde toplam n^2+n tane doğrunun var olduğunu biliyoruz. Her bir paralel doğru demetinde n tane doğru olduğundan

$$\frac{n^2+n}{n} = \frac{n(n+1)}{n} = n+1$$ tane paralel doğru demeti vardır.